ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

1ère épreuve M, P', TA MATHEMATIQUES (4 h) 1982

Il est recommandé aux candidats d'utiliser dans leurs démonstrations exclusivement les théorèmes du programme.

Hypothèses et notations

Soit E_n un espace vectoriel construit sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

L'endomorphisme nul et l'endomorphisme identité seront désignés respectivement par 0 et id ; Ker u et Im u désignent le noyau et l'espace image de l'endomorphisme u.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ $\quad u^p = u_o u_o \ldots_o u$ (p fois)

$u^o = id$

Soit A une matrice carrée d'ordre n ; $A = (a_{pq})_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant n}}$

exprime que a_{pq} est l'élément situé à l'intersection de la ligne p et de la colonne q ; det A désigne le déterminant de A ; Tr A, la trace de A ; ${}^tA$, la transposée de A.

I désigne la matrice unité ; $A^o = I$.

Soit P_q un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré q :

$$P_q(X) = \sum_{p=o}^{q} a_p X^p$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n :

$$P_q(A) = \sum_{p=o}^{q} a_p A^p$$

Soit u un endomorphisme de E_n :

$$P_q(u) = \sum_{p=o}^{q} a_p u^p$$

p et q désignent des entiers.

1ère partie

1° - Soit $a_p \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant p \leqslant n$; soit $V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la matrice, dite de Vandermonde, définie par : $V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{pq})_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant n}}$ $\quad a_{pq} = a_q^{p-1}$

Montrer que :

$$\det V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (a_q - a_p)$$

2° - Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n ; montrer que :

$$\mathrm{Tr}\,(A.B) = \mathrm{Tr}\,(B.A).$$

3° - Montrer que, si A et B sont deux matrices semblables, leurs traces sont égales :

$$\mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,B$$

4°) Soit u un endomorphisme de E_n tel que $u^2 = id$.

.../...

Montrer que :

$$\text{Ker } (u - id) \cap \text{Ker } (u + id) = \{0\}$$

$$\text{Im } (u + id) \subset \text{Ker } (u - id) \; ; \; \text{Im } (u - id) \subset \text{Ker } (u + id)$$

Soit :

$$p_1 = \dim \text{Ker } (u - id) \; , \; q_1 = \dim \text{Im } (u - id)$$

$$p_2 = \dim \text{Ker } (u + id) \; , \; q_2 = \dim \text{Im } (u + id)$$

Montrer que :

$$p_1 + p_2 = n$$

u est diagonalisable

5° - a) Soient u un endomorphisme de E_n et P_2 un polynôme dont les racines α_1 et α_2 sont distinctes, tel que $P_2(u) = 0$.

Montrer, en utilisant le même raisonnement qu'à la question 4°, que u est diagonalisable.

Indication : la propriété : "Pour que deux endomorphismes f et g de E_n vérifient $f \circ g = 0$, il faut et il suffit que Im g ⊂ Ker f" pourra être utilisée.

b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : si u est un endomorphisme de E_n qui vérifie $P_q(u) = 0$ où P_q est un polynôme dont toutes les racines sont distinctes deux à deux, u est diagonalisable.

6° - Montrer que, réciproquement, si u est un endomorphisme diagonalisable de E_n, il existe un polynôme P_q, qui n'a que des racines simples, tel que $P_q(u) = 0$.

2ème partie

Soit τ_n le nombre complexe :

$$\tau_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Soit A_n la matrice de Vandermonde $V_n(1, \tau_n, \tau_n^2, \ldots, \tau_n^{n-1})$ et soit $G_n = \text{Tr } A_n$.

1° - Calculer G_1, G_2, G_3, G_4, G_6.

2° - Soit r un entier relatif ; calculer $\zeta_n^r = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_n^{kr}$

Distinguer deux cas selon que r est, ou non, un multiple de n.

3° - a) Calculer $A_n . \overline{A_n}$.

En déduire que A_n est régulière, et donner une expression de A_n^{-1} et de $|\det A_n|$.

b) Calculer A_n^2 , $B_n = \frac{1}{n} A_n^2$ puis B_n^2 .

4° - Montrer que B_n est diagonalisable ; préciser les seules valeurs propres possibles.

Soit $V = (x_q)$ $1 \leqslant q \leqslant n$ un vecteur de E_n. Calculer $B_n V$; en déduire des relations vérifiées par les vecteurs propres.

En distinguant suivant la parité de n [n = 2p + 1 ou n = 2p ; p ∈ ℕ], achever la détermination des vecteurs propres et préciser la dimension des sous espaces propres.

5° - Montrer que A_n est diagonalisable et que les seules valeurs propres possibles sont :

$$\sqrt{n} \; , \; i\sqrt{n} \; , \; -\sqrt{n} \; , \; -i\sqrt{n}$$

6° - Calculer, en fonction de n, l'expression :

$$C_n = \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (p + q)$$

.../...

Indication : remarquer que :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant n}} (p + q) = 2\,C_n + 2 \sum_{p=1}^{n} p$$

7° - En utilisant l'expression de det V_n trouvée en I, 1° et le résultat précédent, montrer qu'un argument θ_n de det A_n est $\frac{\pi}{4}(3n - 2)(n - 1)$

Indication : utiliser :

$$e^{i\alpha} - 1 = 2i\, e^{\frac{i\alpha}{2}} \sin\frac{\alpha}{2}$$

8° - Soit r un entier relatif ; soit G_n^r l'expression :

$$G_n^r = \sum_{k=o}^{n-1} \tau_n^{(r+k)^2}$$

Montrer que : $\forall n$, $\forall r$ $G_n^r = G_n$.

(Considérer $G_n^{r+1} - G_n^r$)

En déduire

$$|G_n|^2 = \sum_{\substack{0 \leqslant r \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant s \leqslant n-1}} \tau_n^{(r+s)^2 - r^2}$$

Montrer, à partir de cette expression, que :

$$|G_n| = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n = 2p + 1 \\ \sqrt{2n} & \text{si } n = 4p \\ 0 & \text{si } n = 4p + 2 \end{cases} \qquad p \in \mathbb{N}$$

3ème partie

Soient a_n, b_n, c_n, d_n les entiers naturels égaux respectivement aux ordres de multiplicité des valeurs propres éventuelles $\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$ de la matrice A_n.

1° - Exprimer G_n en fonction de a_n, b_n, c_n, d_n ; en déduire la valeur de $(a_n - b_n)^2 + (c_n - d_n)^2$ en fonction de n.

2° - Calculer $a_n + b_n$ et $c_n + d_n$; distinguer suivant la parité de n.

3° - Montrer que a_n , b_n , c_n , d_n vérifient un système de trois équations :

a) Résoudre ces trois équations lorsque n est impair ($n = 2p + 1$). Distinguer selon la parité de p : $p = 2k$ ou $p = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

Est-ce que les solutions trouvées fournissent effectivement les ordres de multiplicité des valeurs propres ? considérer $\theta_n = \text{Arg}(\det An)$.

b) Résoudre ces trois équations lorsque n est pair ($n = 2p$).

Distinguer selon la parité de p : $p = 2k$ ou $p = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

Est-ce que les solutions trouvées fournissent effectivement les ordres de multiplicité des valeurs propres ? considérer $\theta_n = \text{Arg}(\det An)$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail